

Агар $\Delta=0$ ва Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} детерминантлардан ақалли биттаси нолдан фаркли бўлса, у ҳолда берилган система ечимга эга бўлмайди ва бу система *биргаликда бўлмаган система* деб аталади. Камида битта ечимга эга бўлган система *биргаликдаги система* деб аталади.

1-мисол. Чизикли тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$$

Е ч и ш. Детерминантларни топамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Детерминант $\Delta=4 \neq 0$ бўлгани учун система ягона ечимга эга ва Крамер формуласини қўлаб, уни топамиз:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 20 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & 20 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = -1.$$

1.2.3. n та номаълумли n та чизикли тенгламалар системасини n нинг катта ($n \geq 4$) қийматларида Крамер қондаси билан ечиш бир нечта юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашни талаб этади. Шу сабабли, бундай системаларни ечишда Гаусс усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, унда номаълумлар кетма-кет йўқотилиб, система учбурчаксимон шаклга келтирилади. Агар система учбурчаксимон шаклга келса, у ягона ечимга эга бўлади ва унинг номаълумлари охириги тенгламадан бошлаб топиб борилади. (Система чексиз кўп ечимга эга бўлса, номаълумлар кетма-кет йўқотилгач, у трапециясимон шаклга келади.)

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

чизикли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. Иккинчи, учинчи, тўртинчи тенгламалардан x_1 ларни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани кетма-кет -1 , -2 , -2 га кўпайтирамиз ва мос равишда иккинчи, учинчи, тўртинчи тенгламалар билан қўшамиз. Натижада ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -5, \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан иккинчи тенгламани айирамиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

сўнгра тўртинчи тенгламани -6 га кўпайтириб, учинчи тенгламага қўшсак, учбурчакли система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_4 = -7. \end{cases}$$

Бундан,

$$\begin{aligned}x_4 &= -1, \\x_3 &= 2 + x_4 = 1, \\x_2 &= -x_3 - x_4 = 0, \\x_1 &= 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2.\end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1.$$

2-дарсхона топшириғи

1. Чизикли тенгламалар системаларини ечинг:

$$\begin{aligned}\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ 6x_1 - 2x_2 = 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 = 2; \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 0, \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}\end{aligned}$$

Ж: а) $x_1 = 2, x_2 = -1$; б) системанинг ечимлари йўқ; в) x_1 — ихтиёрий, $x_2 = 1 - 2x_1$; г) $x_1 = 0, x_2 = 0$; д) $x_1 = 1, x_2 = 1$.

2. Чизикли тенгламалар системаларини ечинг:

$$\begin{aligned}\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Ж: а) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$; б) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$;

в) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

3. Тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг:

$$\begin{aligned}\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}\end{aligned}$$

Ж: а) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$;

б) $x_1 = 8, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 2$.

2- мустақил иш

1. Чизикли тенгламалар системаларини Крамер қондаси бўйича ечинг ва текширинг:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 17, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases} \end{array}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases} \end{array}$$

Ж: а) $x_1=0, x_2=0, x_3=0$; б) $x_1=-1, x_2=-1, x_3=1$.

3. Чизикли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг ва текширинг:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 = -7, \\ x_2 + x_3 - 7x_4 = -5; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -3. \end{cases} \end{array}$$

Ж: а) $x_1=2, x_2=1, x_3=-1$;
 б) $x_1=0, x_2=0, x_3=1$;
 в) $x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=1$;
 г) $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$.